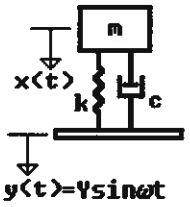
1) (2 val)O sistema representado na figura está sujeito a um movimento harmónico da base.



a) (50%) Definir transmissibilidade absoluta TR_{abs} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

b) (50%) Definir transmissibilidade relativa TR_{rel} e representá-la graficamente em função da frequência de excitação ω e para 2 valores diferentes da razão de amortecimento ξ. Comentar e indicar eventuais pontos notáveis.

2) (1 val)Para um sistema vibratório com um grau de liberdade, amortecido e com condições iniciais nulas, caracterizar sucintamente a resposta $x(t)$ para as seguintes solicitações:

a) (25%) solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$;
b) (25%) solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$;
c) (25%) solicitação impulsiva aplicada no instante $t = \tau$;
d) (25%) solicitação em "degrau" aplicada no instante $t = \tau$.

3) (1 val)A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema. Para um sistema amortecido com um grau de liberdade,

a) (60%) Definir e estabelecer a expressão da função de resposta em frequência de tipo receptância;

b) (40%) Representar graficamente a função de resposta em frequência mobilidade sob a forma do diagrama de Bode e do diagrama de Nyquist, indicando aspectos notáveis destas representações.

4) (1 val)Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

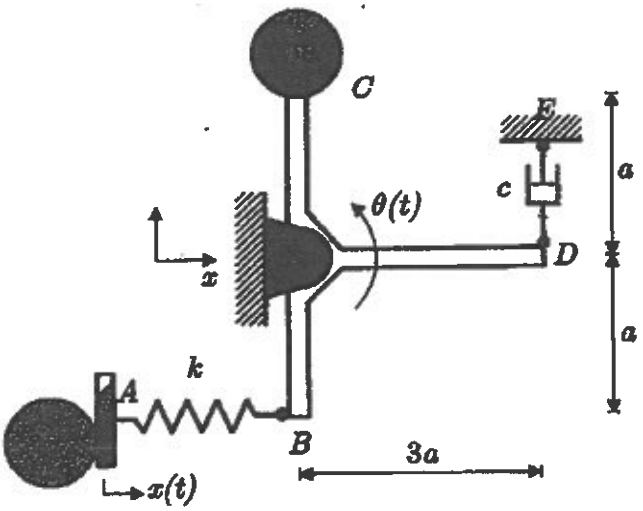
c) (50%) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração;
d) (50%) Caracterizar, justificando, a frequência natural e o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

5) (2 val)O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\} = \{x\}_0$ e $\{\dot{x}(t=0)\} = \{\dot{x}\}_0$. A resposta do sistema pode ser determinada por integração directa das equações do movimento ou por análise modal.

a) (25%) Indicar a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal e o interesse desta técnica na determinação do regime forçado;
b) (25%) Justificar a utilização da análise modal truncada. Comentar a selecção dos modos naturais de vibração considerados na análise modal truncada.
c) (25%) Em que condições os vectores modais do sistema conservativo podem ser utilizados para determinar o regime forçado do sistema amortecido? Demonstrar.
d) (25%) Indicar os pressupostos dos métodos de integração directa das equações diferenciais do movimento. Caracterizar o método das diferenças finitas como método de integração directa.

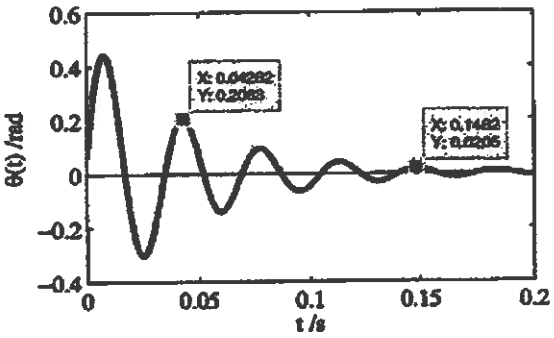
6) (1 val) Responder, em alternativa, à questão 6.1 ou 6.2.

→



1) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por duas barras rígidas ligadas em T e por uma massa concentrada m (ponto C). O sistema oscila ($\theta(t)$) em torno do ponto O por acção de um deslocamento $x(t)$ aplicado ao ponto A por um excêntrico. O movimento imposto $x(t)$ transmite-se ao sistema através de uma mola de rigidez k e é controlado por um amortecedor viscoso de constante c (ponto D).

Num ensaio em regime livre, foi registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico.



Determinar,

a) (10%) a razão de amortecimento ξ;
b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia das barras, estabelecer:

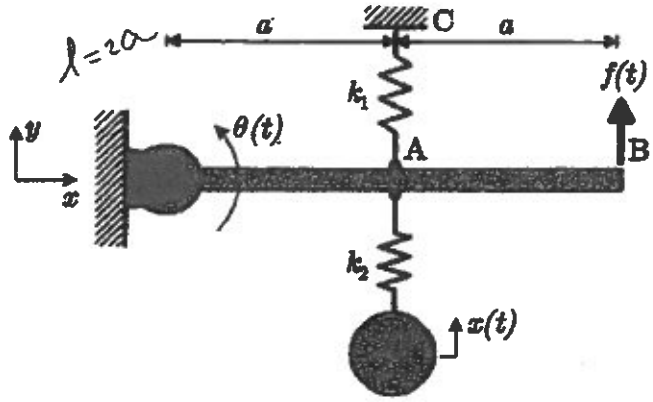
c) (30%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para os valores numéricos $a = 0.5$ m e $k = 5 \times 10^4$ N/m, determinar:

d) (10%)a massa concentrada m;

Para um deslocamento harmónico $x(t) = X \sin \omega t$ com $\omega = 360$ rad/s, a amplitude de vibração da massa m é igual a 10 mm.

e) (20%) determinar a amplitude X do deslocamento imposto;
f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure(m) uma amplitude $\Theta(\omega)$ inferior a 5°.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma barra rígida de massa m_1, de comprimento ℓ, articulada no ponto O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de constante de rigidez k_1 e sobre a qual actua uma força $f(t)$ no ponto B. No ponto A está ligada uma mola linear elástica de constante de rigidez k_2 da qual está suspensa uma massa concentrada m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para

$$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad m_1 = 6m \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\,\text{m},$$

b) (15%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 25600$ N/m e $m = 1$ kg,

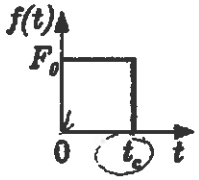
d) (20%) Determinar a amplitude $\Theta(\omega)$ da resposta da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 178$ rad/s. Esboçar graficamente a variação da amplitude $\Theta(\omega)$ em função da frequência de excitação ω, assinalando eventuais pontos notáveis.

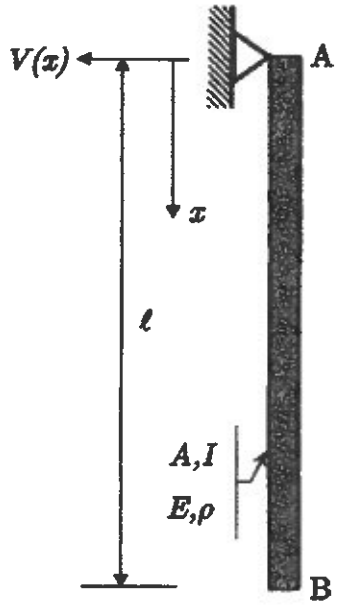
e) (20%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.0137$ s. Comentar.

Nota:



$$J_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está apoiada na extremidade $x = 0$ e está livre na extremidade $x = \ell$, conforme se representa na figura.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (15%) Discutir, justificando, as condições de aplicabilidade da função $V(x) = \alpha x - \delta \sin\frac{\pi}{\ell}x$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função.

c) (30%) Calcular a energia potencial máxima, a energia cinética máxima e o quociente de Rayleigh para determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) (30%) Determinar o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado. Comparar com a solução exacta. Comentar.

e) (10%) Determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.

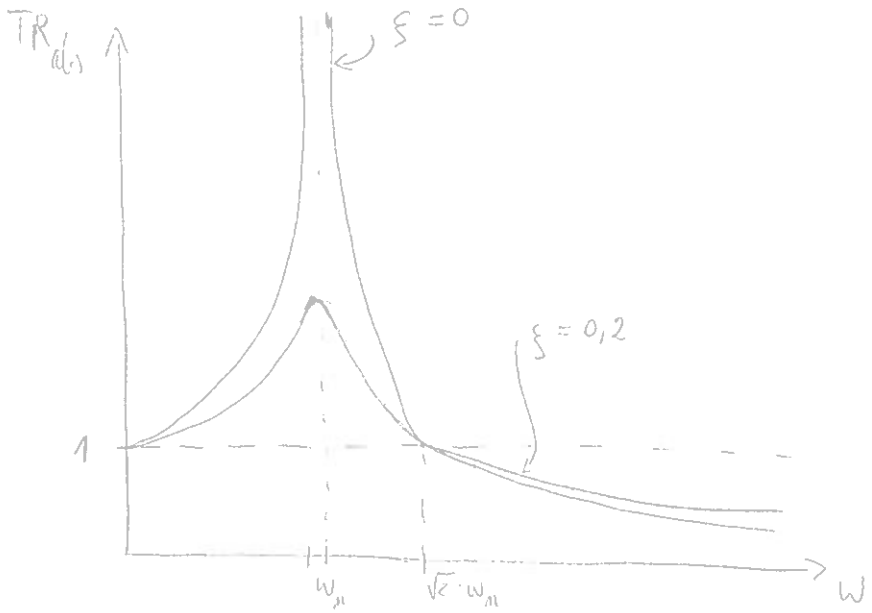
Vibrações e Ruído – Exame 1ª Chamada de 2007-06-20

Parte Teórica

1)

a) Transmissibilidade absoluta, TR_{abs}, representa a transmissão de deslocamento da base para a massa. É o quociente entre a amplitude $X(w)$ do movimento da massa e a amplitude Y do movimento da base:

$$TR_{abs} = \frac{X(w)}{Y} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$



$w_r = w_n\sqrt{1-\beta^2}$

Comentários:

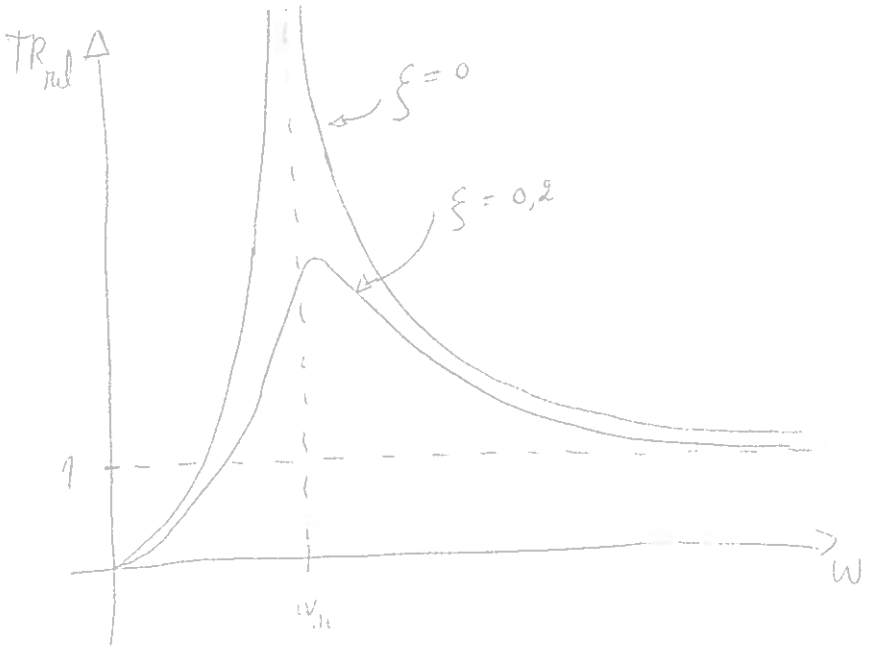
→ Em torno da ressonância a TR é muito sensível ao amortecimento;

→ Para $w = \sqrt{2}\,w_n$ a TR é igual, para qualquer amortecimento, à unidade;

→ Para frequências de excitação superiores a $\sqrt{2}\,w_n$ quanto maior o amortecimento maior a TR; sendo o comportamento contrário para valores de $w < \sqrt{2}\,w_n$

b) A transmissibilidade relativa, TR_{rel}, representa a razão entre a amplitude $Z(\omega)$ do movimento relativo (da massa em relação à base) e a amplitude Y do movimento da base.

$$TR_{rel} = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Comentários:

→ Novamente com forma de ressonância há uma grande sensibilidade da TR_{rel} ao amortecimento (diminuindo com o aumento deste);

→ A tendência para infinito da frequência de excitação conduz à tendência para a unidade da TR_{rel} (independentemente do amortecimento); significando que a massa do apoio se mantém praticamente estacionária.

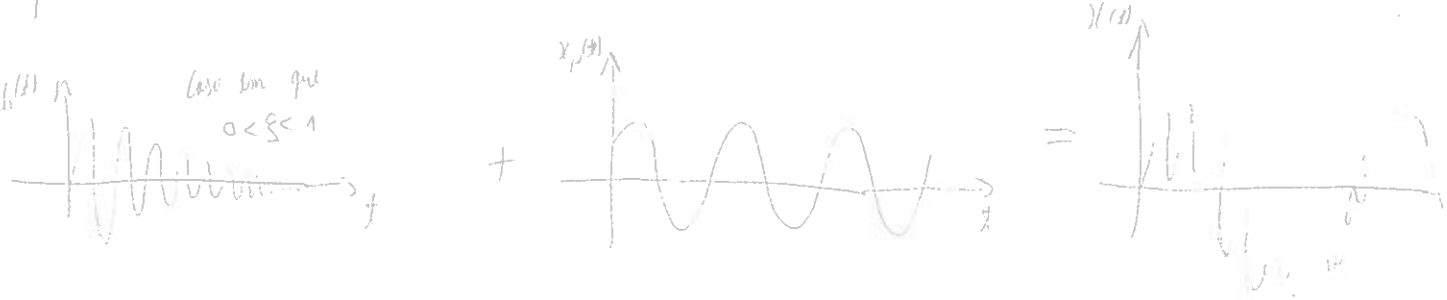
2) a) $$x_p(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

$$X(\omega) = \frac{\frac{F}{K}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad ; \quad \phi = \arctan\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

A resposta transitória é:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A_1 \cos\omega_d t + A_2 \operatorname{sen}\omega_d t\right)$$

A resposta do sistema a uma solicitação harmónica tem 2 componentes: uma transitória que corresponde à resposta livre ou natural amortecida do sistema e outra estacionária ou permanente que é harmónica de amplitude $X(\omega)$ e desfasamento ϕ em relação à excitação:



b) A resposta do sistema é obtida através da decomposição da solicitação numa série de Fourier, o que dá origem a uma resposta que contém cada resposta a cada termo harmónico da série obtida, ficando portanto uma combinação de harmónicos, cada qual com a frequência $p\omega$ (com p sendo a ordem do harmónico) e com um desfasamento próprio. Esta combinação de respostas individuais só é possível através da aplicação do princípio da sobreposição de efeitos.

Características da resposta estacionária:

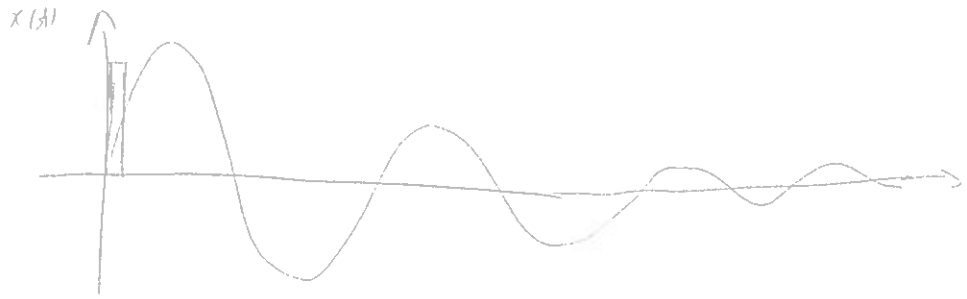
→ É um movimento periódico com o mesmo período da solicitação (regime estacionário periódico)

→ A amplitude $X(\omega)$ e o desfasamento ϕ_p de cada harmónico dependem da ordem p.

NOTA: Cada harmónico ainda tem a si associado uma resposta transitória!

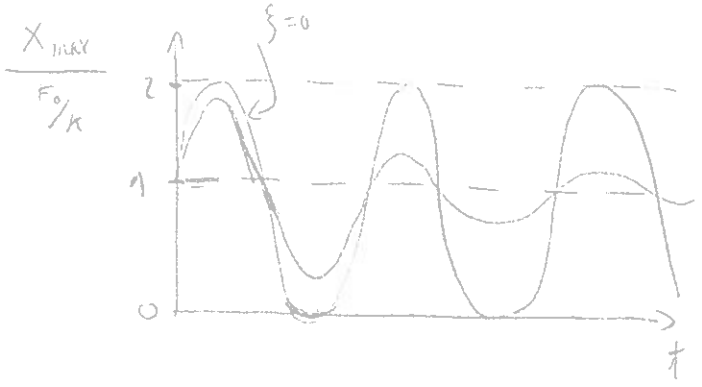
c) A acção do impulso aplicado para $t = \tau$ é equivalente ao efeito de uma velocidade inicial $\dot{x}_0 = \frac{\tilde{F}}{m}$ e um deslocamento inicial nulo. O movimento provocado pela aplicação do impulso é

e de vibração livre ou natural amortecida do sistema para as condições iniciais referidas anteriormente:



d) A resposta a uma solicitação transiente do tipo "degrau" (ou qualquer outro tipo) pode ser obtida por combinação de uma série de forças impulsivas $f(\gamma)$ actuando durante intervalos de tempo $d\gamma$.

Para o caso da resposta à solicitação em "degrau" verifica-se que a resposta é um movimento harmónico à frequência natural amortecida em torno da posição correspondente ao equilíbrio estático $\frac{F_0}{K}$, e que o valor máximo da amplitude pode atingir o dobro do valor de equilíbrio estático $\left(2\,\frac{F_0}{K}\right)$.



3) $$\alpha(j\omega) = \frac{\bar{X}(j\omega)}{F}$$

$$x(t) = \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t} \rightarrow \dot{x}(t) = j\omega\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\, \bar{X}(j\omega)\, e^{j\omega t}$$

Substituindo na eq. diff. do movimento:

$$\left(-m\omega^2 + j\omega c + k\right) \bar{X}(\omega)\, e^{j\omega t} = F\, e^{j\omega t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{X}(\omega) = \frac{F}{(k - m\omega^2) + j\omega c}$$

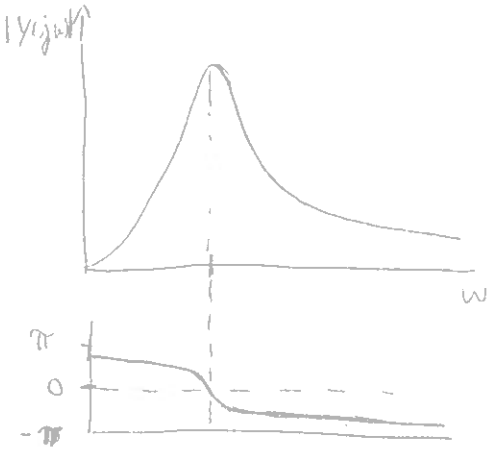
Logo:

$$\alpha(j\omega) = \frac{1}{(k - m\omega^2) + j\omega c} \qquad \text{c.q.d.}$$

A resposta em frequência do tipo receptância é uma forma compacta de obtenção das propriedades intrínsecas do sistema relacionando a excitação (unitária) com a resposta (em deslocamento) estacionária do sistema.

b) $$Y(j\omega) = j\omega\, \alpha(j\omega) = j\omega \frac{1}{(k - m\omega^2) + j\omega c}$$

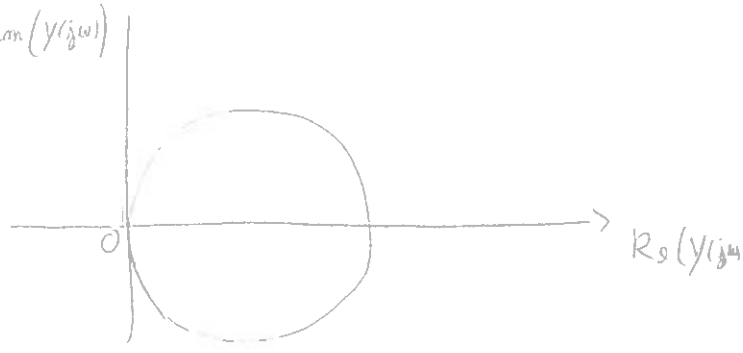
Diagrama de Bode



Máximo para $\omega = \omega_n$

Mudança de fase para $\omega = \omega_n$

Diagrama de Nyquist



Circunferência perfeita

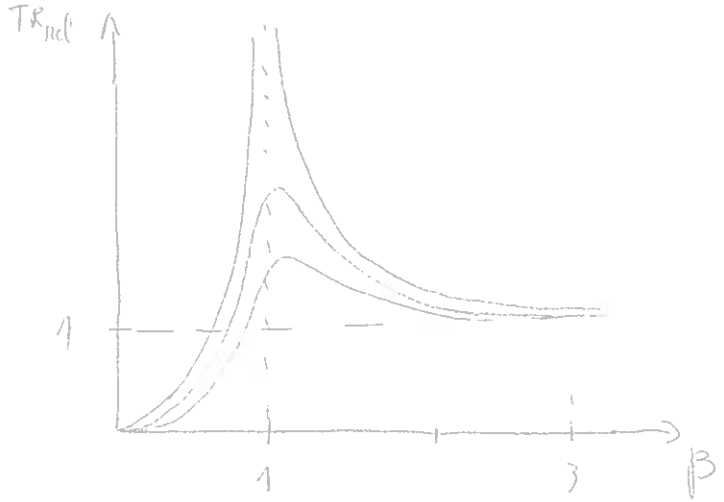
$$\begin{cases} (x_c, y_c) = \left(\frac{1}{2c}, 0\right) \\ r = \frac{1}{2c} \end{cases}$$

4) a), b) Transdutores de deslocamento:

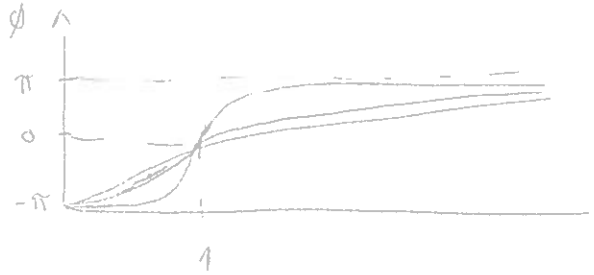
A gama de frequência em que funcionam é $\beta > 3 \Rightarrow w > 3w_n$.

Do forma a poder medir frequências de excitação baixas têm de ter uma frequência natural muito baixa, o que implica grandes massas sísmicas e baixa rigidez.

$$TR = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



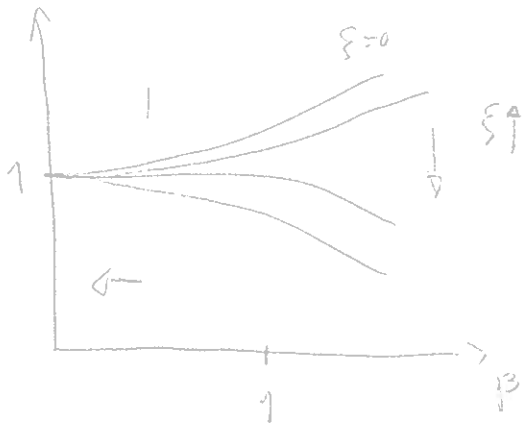
O defasamento tende para π, pelo que a sua resposta está em oposição de fase (no caso de vários harmónicos)



Transdutores de aceleração

$$TR = \frac{-w^2 Z(w)}{Y} = \frac{-w^2\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = -\frac{1}{w_n^2}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Se representarmos o gráfico do termo $\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$



Portanto verifica-se que os acelerómetros funcionam para β pequenos, havendo a necessidade de aumentar a frequência natural do acelerómetro o que conduz a uma pequena massa sísmica e uma grande rigidez, repercutindo-se em atravancamentos pequenos.

O desfasamento, para β baixos e $\xi \approx 0{,}7$, é praticamente linear variando de 0 (para $\beta=0$) a $\frac{\pi}{2}$ (para $\beta=1$), como se vê no gráfico de ϕ.

5) Não sai

6) Não sai

Parte Prática

1)

a) $T_d = \frac{2\pi}{w_d}$

Pelo gráfico: $T_d = \frac{0,1482 - 0,04262}{3} \cong 0,035119(3)$ s

$w_d = \frac{2\pi}{w_d} \cong 178,5334$ rad/s $\rightarrow$ $w_d = w_n\sqrt{1-\xi^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}}$

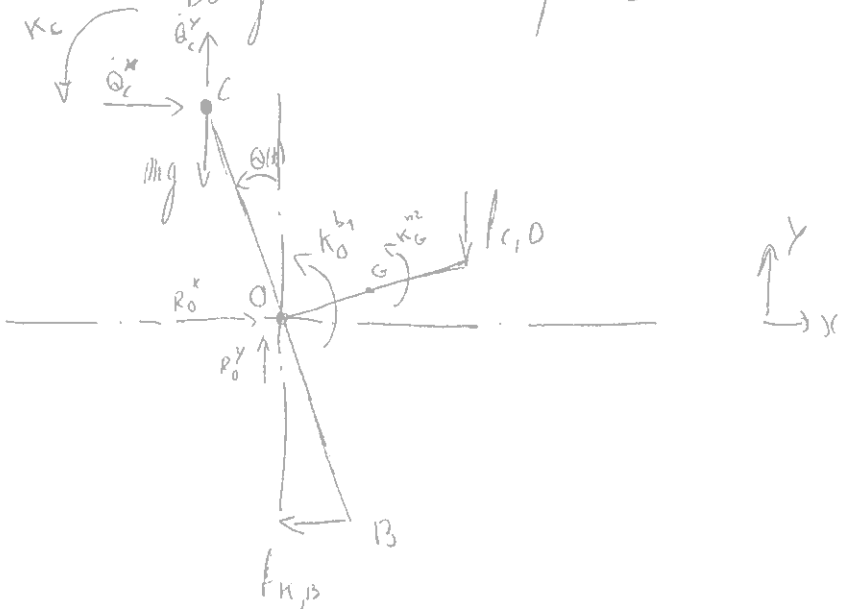
$\ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)} = \xi w_n T \cdot N \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln \frac{0,2063}{0,0205} = \xi \cdot \left(\frac{178,5334}{\sqrt{1-\xi^2}}\right) \cdot 0,035119(3) \times 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \xi \cong 0,1216$

b) $w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1-\xi^2}} \cong 179,8678$ rad/s $\cong 179,87$ rad/s

c) Diagrama de Corpo Livre:



Barras:

$$\vec{H}_O^{b_1} = \cancel{[I]} \times \vec{\omega} \Rightarrow \vec{K}_O^{b_1} = \vec{0}$$

$\cancel{=0}$

$$\vec{H}_G^{b_2} = \cancel{[I]} \times \vec{\omega} \quad ; \quad \vec{Q}^{b_2} = \cancel{m} \times \vec{OG} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K}_G^{b_2} = \vec{0}$$

$\cancel{=0}$

Massa:

$$\vec{H}_C^{m} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{I_{zz}} \end{bmatrix} \times \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \cancel{I_{zz}}\,\dot{\theta} \end{vmatrix} = \vec{0}$$

$\cancel{=0}$

$$\vec{Q}^{m} = m \frac{d}{dt} \begin{vmatrix} -a \operatorname{sen}\tilde{\theta} \\ a \cos\tilde{\theta} \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} -a\,m\,\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \vec{Q}^{m} = \begin{vmatrix} -a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\vec{K}_O^{m} = \cancel{\vec{H}_G} + \vec{OG} \times \vec{Q}^{m} \approx \begin{vmatrix} -a\,\theta \\ a \\ 0 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} -a\,m\,\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\,\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

$\cancel{=0}$

$$\Sigma \vec{K}_O = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ a^2 m\,\ddot{\theta} \end{vmatrix}$$

Força da mola:

$$\theta_0 = 0^\circ \Rightarrow \ell_{K,B} = 0 \Rightarrow \theta_{mola} = 0 \text{ rad}$$

$$|\ell_{K,B}^{K}| = K\left[\left(a \operatorname{sen}\tilde{\theta} - x(t)\right) - \cancel{\ell_{mola}}\right] = K\left(a\,\theta(t) - x(t)\right)$$

$\cancel{=0}$

Força amort.:

$$|F_{c,D}^{\vec{y}}| = C\left[\frac{d}{d\theta}\left(3a \underset{\approx}{\overset{\theta}{\sin}}\,\theta\right)\right] = 3aC\dot{\theta}$$

Eq. diferencial de movimento:

$$\Sigma M_0 = \Sigma K_0 \Rightarrow a \underset{\approx}{\overset{\theta}{\sin}}\,\theta \cdot (mg) - a \underset{\approx}{\overset{1}{\cos}}\,\theta \cdot \left(K(a\theta - x(t))\right) -$$

$$- 3a \underset{\approx}{\overset{1}{\cos}}\,\theta \cdot \left(3aC\dot{\theta}\right) = a^2 m \ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\left(a^2 m\right)\ddot{\theta}(t) + \left(9a^2 C\right)\dot{\theta}(t) + \left(a^2 K - a\,m\,g\right)\theta(t) = (aK)\,x(t)}$$

d) $$W_n = \sqrt{\frac{K_q}{m_q}} \Leftrightarrow 179{,}87 = \sqrt{\frac{0{,}5^2 \times 5\times 10^4 - 0{,}5\ m \cdot 9{,}81}{0{,}5^2 \times m}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m \cong 1{,}5445\ kg$$

e) Considerando apenas a resposta estacionária:

$$\theta(t) = \Theta(\omega)\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2} - \phi\right)$$

Pois $$x(t) = X\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{aK \cdot X}{a^2 K - a\,m\,g}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (1)$$

É-nos dada a amplitude de vibração:

$$\overset{0,5}{a}\ \overbrace{\operatorname{sen}\theta}^{\approx\theta} = 0,010 \Rightarrow \Theta(\omega) \approx 0,02 \text{ rad}$$

Como: $\beta = \dfrac{\omega}{\omega_n} = \dfrac{360}{179,87} \approx 2,0015$

$m \approx 1,5445$ Kg

$K = 5 \times 10^4$ N/m

$\xi \cong 0,1216$

Substituindo em (1):

$$X \approx 0,03043 \text{ m} \cong \boxed{30,4 \text{ mm}}$$

f) $\Theta(\omega)_{max} = 5^\circ \cong 0,08727$ rad

$$0,08727 = \frac{\dfrac{0,5 \times 5\times10^4 \times 0,03043}{0,5^2 \times 5\times10^4 - 0,5 \times 1,5445}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\underset{\substack{\parallel \\ 0,1216}}{\xi}\beta)^2}} \Leftrightarrow \beta_1 \cong 0,5618 \vee \beta_2 \cong 1,2748$$

Logo: $\boxed{\omega_1 = \beta_1 \cdot \omega_n \cong 101,05 \text{ rad/s} \vee \omega_2 \cong 229,30 \text{ rad/s}}$

2) Não sai

3) Não sai